Научная статья
УДК 510.67
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-99-110

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ o – МИНИМАЛЬНОСТИ

Канат Жанзакович Кудайбергенов

Институт математики и математического моделирования, 050100, Алматы, Казахстан

kanatkud@gmail.com

Аннотация

Вводятся некоторые обобщения понятия o-минимальности — λ-o-минимальность и слабая λ-$p.o.$-lin-минимальность, и изучаются их свойства.

Ключевые слова и фразы

слабая λ-$p.o.$-lin-минимальность, o-минимальность, λ-o-минимальность.

Источник финансирования

Работа поддержана Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант AP19677434)

Для цитирования

Кудайбергенов К. Ж. Некоторые обобщения o – минимальности // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 99-110. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-99-110

SOME GENERALIZATIONS OF o-MINIMALITY

Kanat Zh. Kudaibergenov

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050100, Almaty, Kazakhstan

kanatkud@gmail.com

Abstract

Some generalizations of the concept of o-minimality — λ-o-minimality and weak λ-$p.o.$-lin-minimality, are introduced and their properties are studied.

Keywords

weak λ-$p.o.$-lin-minimality, o-minimality, λ-o-minimality.

Funding

The work supported by the Science Committee of the Ministry of Eduction and Science of Republic of Kazakhstan (grant AP19677434)

For citation

Kudaibergenov K. Zh. Some generalizations of o-minimality // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 99-110. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-99-110

Введение

В этой работе вводятся и изучаются некоторые обобщения классического понятия о-минимальности. Напомним, что модель называется о-минимальной, если любое ее определимое подмножество является объединением конечного числа интервалов. Здесь и в дальнейшем "определимое" означает "определимое с параметрами".

Понятие о-минимальности было впервые введено и изучалось для обогащений вещественно замкнутых полей в работе [1], а в общем теоретико-модельном случае в работе [2]. Имеются многочисленные обобщения этого понятия: слабая о-минимальность [3], [4]; квази-о-минимальность [5]; слабая квази-о-минимальность [6]; о-минимальность для решеточно упорядоченных моделей [7], [8]; C-минимальность [9]; (слабая, квази-) $p.o.$-минимальность [10]; (слабая, квази-) мульти-$p.o.$-минимальность, (слабая, квази-) мульти-R-минимальность [11].

В данной работе мы рассмотрим обобщения о-минимальности, в которых ключевое условие в определении о-минимальности – конечность числа интервалов – ослабляется до условия существования в каждом определимом множестве (или в некоторых определимых множествах) максимального интервала (или чего-то подобного) и тем самым получив понятия λ-о-минимальности, λ-sub-о-минимальности, слабой λ-$p.o.$-lin-минимальности.

В § 1 мы покажем, что если линейный порядок в модели является плотным и модель 2-о-минимальна, то она о-минимальна.

Кроме того, в § 1 будет доказано, что любая 2-sub-о-минимальная группа является абелевой и делимой, а любое 2-sub-о-минимальное кольцо является полем.

В § 2 мы докажем, что любая функция, определимая в модели слабо плотно-$p.o.$-минимальной слабо ω-$p.o.$-lin-минимальной теории и согласованная с порядком, является локально монотонной. Аналогичный результат для функций, определимых в моделях слабо о-минимальных теорий, был получен в [4]. Для функций, определимых в моделях о-минимальных теорий, в [2] был получен более сильный результат. (Заметим, что в [4] и [2] линейный порядок, относительно которого модель является слабо о-минимальной или о-минимальной, предполагается плотным.)

§ 1. λ-о-минимальность

В дальнейшем "интервал" будет означать "открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал". Через $\lfloor a, b \rfloor$ будем обозначать интервал с концами a и b, а через (a, b) – открытый интервал с концами a и b.

Модели будем обозначать через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, а их основные множества — через M и N соответственно. Мощность множества A обозначим через $|A|$. Через λ будем обозначать кардиналы, через ω — первый бесконечный кардинал. В дальнейшем мы будем рассматривать только полные теории.

Определение 1.1. Интервал I назовем λ-*интервалом*, если $|I| \geq \lambda$.

Определение 1.2. Линейно упорядоченную модель $\mathcal{M} = (M, <, \dots)$ назовем

- λ-*о-минимальной*, если любое бесконечное определимое множество в $\mathcal{M}$ содержит максимальный λ-интервал;

- *плотно*-λ-*о-минимальной*, если линейный порядок в модели является плотным и модель λ-о-минимальна.

Ясно, что если модель плотно-2-о-минимальна, то она является плотно-ω-о-минимальной.

Теорема 1.1. *Если модель является плотно-2-о-минимальной, то она о-минимальна.*

Доказательство. Пусть A – бесконечное определимое подмножество 2-о-минимальной модели $\mathcal{M}$. Нужно доказать, что

(i) A является объединением конечного числа интервалов.

Для этого индукцией по $n < \omega$ определим максимальные 2-интервалы $I_n \subseteq A$. В силу 2-о-минимальности модели $\mathcal{M}$ бесконечное определимое множество A содержит максимальный 2-интервал I_0. Для $n > 0$ если определимое множество $A_n = A \setminus \bigcup_{i<n} I_i$ бесконечно, то существует максимальный 2-интервал $I_n \subseteq A_n$. Если A_n конечно, то (i) доказано.

Пусть B – множество левых концов максимальных 2-интервалов, содержащихся в A. Ясно, что B является определимым. Если A_n бесконечно для всех $n < \omega$, то и B бесконечно. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что B конечно.

Для любого $a \in B$ обозначим через a' правый конец соответствующего максимального 2-интервала, $a' \in M \cup \{\infty\}$.

Допустим, что B бесконечно. В силу плотно-2-o-минимальности модели $\mathcal{M}$ и определимости множества B существует 2-интервал $J \subseteq B$. Пусть $a_1, a_2 \in J$, $a_1 < a_2$.

Случай 1. $a_2 < a_1'$.

Тогда если $a_2' \leq a_1'$, то

$$\lfloor a_2, a_2' \rfloor \subsetneq \lfloor a_1, a_1' \rfloor \subseteq A,$$

а это противоречит тому, что $\lfloor a_2, a_2' \rfloor$ – максимальный интервал, содержащийся в A.

Если $a_1' < a_2'$, то

$$\lfloor a_1, a_1' \rfloor \subsetneq \lfloor a_1, a_2' \rfloor = \lfloor a_1, a_1' \rfloor \cup \lfloor a_2, a_2' \rfloor \subseteq A,$$

а это противоречит тому, что $\lfloor a_1, a_1' \rfloor$ – максимальный интервал, содержащийся в A.

Случай 2. $a_1' \leq a_2$.

Тогда в силу плотности линейного порядка модели найдется элемент $a_3 \in (a_1, a_1') \subseteq J \subseteq B$. Рассуждая как в случае 1 с заменой a_2 и a_2' на a_3 и a_3', получим противоречие.

Таким образом, предположение о бесконечности множества B приводит к противоречию. Значит, B конечно и теорема доказана. $\square$

Итак, плотная 2-o-минимальность влечет o-минимальность. Но в случае 1-o-минимальности это не так.

Пример. Модель $\mathcal{M} = (M, <, P)$, где $(M, <)$ – множество вещественных чисел с обычным порядком, а P – унарный предикат, выделяющий множество рациональных чисел, является плотно-1-o-минимальной, но не o-минимальной.

Действительно, линейный порядок в $\mathcal{M}$ является плотным.

Нетрудно проверить, что для любой модели $\mathcal{N}$ теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, любой ω-насыщенной модели $\mathcal{N}'$ теории $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, любого конечного $B \subseteq N$ и любого $a \in N$ каждый изоморфизм из $\mathcal{N}(B)$ в $\mathcal{N}'$ продолжается до изоморфизма из $\mathcal{N}(B \cup \{a\})$ в $\mathcal{N}'$, где $\mathcal{N}(X)$ – подмодель в $\mathcal{N}$, порожденная множеством X. Тогда в силу [12, § 39, предложение 2] теория $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ допускает элиминацию кванторов.

Отсюда следует, что любое непустое определимое множество в $\mathcal{M}$ является некоторой булевой комбинацией интервалов и множества P, а потому содержит максимальный интервал. (Например, P содержит максимальный одноэлементный замкнутый интервал.)

Следовательно, модель $\mathcal{M}$ является 1-о-минимальной.

Множество P не является объединением конечного числа интервалов, поэтому $\mathcal{M}$ не является о-минимальной.

Определение 1.3. Будем говорить, что

- линейно упорядоченная группа является *λ-sub-о-минимальной*, если любая ее нетривиальная определимая подгруппа содержит максимальный λ-интервал;

- линейно упорядоченное кольцо является *λ-sub-о-минимальным*, если любая нетривиальная определимая подгруппа его аддитивной группы является λ-*sub*-о-минимальной.

Теорема 1.2. *Любая 2-sub-о-минимальная группа является абелевой и делимой.*

Доказательство следует из леммы 1.3 и теоремы 1.4. □

Лемма 1.3. *Если группа 2-sub-о-минимальна, то она не имеет нетривиальных определимых собственных подгрупп.*

Теорема 1.4. *Любая линейно упорядоченная группа, все определимые подгруппы которой выпуклы, является абелевой и делимой.*

Доказательство леммы 1.3. Пусть H – нетривиальная определимая собственная подгруппа 2-*sub*-о-минимальной группы G (записываемой аддитивно). Тогда H содержит максимальный 2-интервал I. Пусть a и b – граничные точки интервала I, $a < b$. Для любого $c \in I$ сдвиг $x \mapsto x - c$ переводит I в интервал $I_0 \subseteq H$, содержащий 0. Так как H – подгруппа, то $x \in H \Leftrightarrow -x \in H$ для любого x. Отсюда и из того, что $H \neq G$, следует, что $-\infty < a$ и $b < \infty$.

Если $a \in I$, то сдвиг $x \mapsto x - a$ переводит I в интервал $J \subseteq H$ с граничными точками $0 \in J$ и $b - a$. Интервал J максимален, так как если бы существовал интервал $J' \subseteq H$ с условием $J \subsetneq J'$, то сдвиг $x \mapsto x + a$ перевел бы J' в интервал $I' \subseteq H$ такой, что $I \subsetneq I'$, а это противоречило бы максимальности интервала I. Но $x \in H \Leftrightarrow -x \in H$ для любого x, поэтому J не может быть максимальным интервалом в H. Значит, $a \notin I$. По аналогичной причине $b \notin I$.

Так как $I \neq \varnothing$, то существует $c \in I$. Сдвиг $x \mapsto x - c$ переводит I в максимальный в H интервал $J = (a - c, b - c)$, содержащий 0. Так как $x \in H \Leftrightarrow -x \in H$ для любого x, то J имеет вид $(-h, h)$.

Так как $|J| = |I| \geq 2$, то существует $h' \in J \subseteq H$ такой, что $h' > 0$. Тогда $0 < h - h' < h$, откуда $h - h' \in J \subseteq H$ и потому $h = (h - h') + h' \in H$, что противоречит максимальности J. □

Доказательство теоремы 1.4 можно найти в [6], оно дословно повторяет доказательство соответствующей леммы для слабо о-минимальных групп из [4]. Но поскольку доказательство является простым и коротким, то для удобства читателя мы его воспроизведем.

Пусть $(G, +, 0, <, \dots)$ – группа, о которой идет речь, $g, h \in G$ и $0 < h < g$. Так как централизатор $C_G(g)$ элемента g является определимой и потому выпуклой подгруппой и $0, g \in C_G(g)$, то $h \in C_G(g)$. Отсюда следует, что G абелева.

Для любого положительного целого числа n в силу абелевости группы G множество $nG = \{ng : g \in G\}$ является определимой и потому выпуклой подгруппой, конфинальной в G. Следовательно, $nG = G$, откуда вытекает, что G делима. $\square$

Теорема 1.5. *Любое 2-sub-о-минимальное кольцо с ненулевым умножением является полем.*

Доказательство. Следует из леммы 1.3 и следующего утверждения, доказанного в [5]: любое линейно упорядоченное кольцо с ненулевым умножением, аддитивная группа которого не имеет нетривиальных определимых собственных подгрупп, является полем. $\square$

§ 2. Слабая λ-$p.o.$-lin-минимальность

Определение 2.1. (1) Модель $\mathcal{M} = (M, \leq, \dots)$, где $(M, \leq)$ – частичный порядок, назовем *слабо λ-p.o.-lin-минимальной*, если любое бесконечное определимое множество в $\mathcal{M}$ содержит линейно упорядоченный λ-интервал.

(2) Теорию назовем *слабо λ-p.o.-lin-минимальной*, если любая ее модель является слабо λ-$p.o.$-lin-минимальной.

Теорема 2.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) модель $\mathcal{M}$ слабо λ-p.o.-lin-минимальна;

(2) для любой определимой унарной функции f в модели $\mathcal{M}$ и любого бесконечного определимого множества $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$ существует λ-интервал $J \subseteq I$ такой, что $f \upharpoonright J$ либо постоянна, либо инъективна.

Доказательство. (1)⇒(2). Полагая $E(x, y) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, получим определимое отношение эквивалентности E на I.

Если существует бесконечный E-класс A, то в силу определимости A и слабой λ-$p.o.$-lin-минимальности $\mathcal{M}$ существует λ-интервал $J_0 \subseteq A$. Тогда f постоянна на J_0.

Если каждый E-класс конечен, то множество B минимальных элементов всех E-классов бесконечно и определимо. Тогда существует λ-интервал $J_1 \subseteq B$, любые два элемента которого сравнимы и потому не могут быть минимальными элементами одного и того же E-класса. Следовательно, функция f инъективна на J_1.

(2)⇒(1). Достаточно заметить, что существуют всюду определенные определимые унарные функции в модели $\mathcal{M}$; например, $f = \mathrm{id}_M$. □

Определение 2.2. (1) Частично упорядоченную модель $\mathcal{M}$ назовем *слабо плотно-р.о.-минимальной*, если частичный порядок в $\mathcal{M}$ является плотным и $\mathcal{M}$ слабо *p.o.*-минимальна в смысле [10], т.е. любое определимое множество в $\mathcal{M}$ является булевой комбинацией выпуклых множеств.

(2) Теорию назовем *слабо плотно-р.о.-минимальной*, если любая ее модель является слабо плотно-*p.o.*-минимальной.

Замечание. (i) В [10, следствие 1.2] доказано, что модель $\mathcal{M}$ является слабо *p.o.*-минимальной, если и только если любое определимое множество в $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа выпуклых множеств.

(ii) В работе [10] рассматривается также понятие *p.o.*-минимальной модели: это такая модель, в которой любое определимое множество является булевой комбинацией интервалов. Понятно, что *p.o.*-минимальность влечет слабую *p.o.*-минимальность.

Определение 2.3. Пусть f – функция, определимая в частично упорядоченной модели $\mathcal{M}$. Через $(a, b)_{\mathcal{M}}$ обозначим интервал в $\mathcal{M}$ с концами $a, b \in M$. Будем говорить, что

(i) f *локально монотонна*, если любой открытый интервал $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$ можно разбить на конечное число множеств $X, I_1, \ldots, I_m$ таких, что X конечно и для любого i множество I_i открыто, выпукло и для любого $x \in I_i$ существуют $a, b \in I_i$ такие, что $a < x < b$ и $f \restriction (a, b)_{\mathcal{M}}$ либо строго монотонна, либо постоянна;

(ii) f *согласована с порядком*, если $f(x)$ и $f(y)$ сравнимы для любых сравнимых $x, y \in \mathrm{dom}(f)$.

Теорема 2.2. *Пусть f – функция, определимая в модели $\mathcal{M}$ слабо плотно-р.о.-минимальной слабо ω-р.о.-lin-минимальной теории и согласованная с порядком. Тогда f локально монотонна.*

Доказательство. Можно считать, что модель $\mathcal{M}$ слабо плотно-*p.o.*-минимальна, слабо ω-*p.o.*-lin-минимальна и ω-насыщенна (определение и свойства ω-насыщенных моделей см. [13]). Покажем, что

(*) для любого открытого интервала $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$ существуют $a, b \in I$ такие, что $a < b$ и $f \restriction (a, b)_{\mathcal{M}}$ либо строго монотонна, либо постоянна.

Допустим, что (*) неверно для некоторого открытого интервала $I \subseteq \mathrm{dom}(f)$. В силу теоремы 2.1 можно считать, что f инъективна на I. Тогда в силу плотности порядка индукцией по $i < \omega$ можно выбрать точки $z_i, t_i \in I$ такие, что $z_i < z_{i+1} < t_{i+1} < t_i$ и

(**) $f(z_{2n}) < f(t_{2n})$ и $f(t_{2n+1}) < f(z_{2n+1})$ для любого $n < \omega$.

В силу ω-насыщенности модели $\mathcal{M}$ существует элемент a такой, что $z_n < a < t_n$ для всех $n < \omega$. Множество

$$A = \{f(x) : z_0 \le x < a\}$$

определимо и потому имеет только конечное число выпуклых компонент. Возможны два случая.

Случай 1. Существует выпуклая компонента A' множества A такая, что $f(z_n) \in A'$ для почти всех $n < \omega$ (кроме, возможно, конечного числа).

Возьмем $y^* \in A'$. Так как функция f инъективна, то $f(t_i) \notin A$ для всех $i < \omega$, откуда в силу (**) получаем $f(t_{2n+1}) < y^* < f(t_{2n})$ для почти всех $n < \omega$. Тогда определимое множество

$$B = \{x : f(x) > y^*\}$$

имеет бесконечно много выпуклых компонент, поскольку t_{2n} и t_{2m} при $n < m$ лежат в разных выпуклых компонентах (в противном случае из $t_{2n} > t_{2n+1} > t_{2m}$ мы получили бы $t_{2n+1} \in B$, чего быть не может). Это противоречит слабой $p.o.$-минимальности.

Случай 2. Существуют выпуклые компоненты A^0 и A^1 множества A такие, что множества

$$A^i_f = A^i \cap \{f(z_n) : n < \omega\},\ i < 2,$$

бесконечны.

Возьмем y^* между A^0_f и A^1_f. Имеем $f(z_{n_{2i}}) < y^* < f(z_{n_{2i+1}})$ для всех $i < \omega$ и некоторых $n_0 < n_1 < \dots$. Тогда аналогично случаю 1 получим, что множество B имеет бесконечно много выпуклых компонент. Это противоречит слабой $p.o.$-минимальности.

Итак, (*) доказано. Пусть C – множество всех $x \in \mathrm{dom}(f)$, для которых не существует открытого интервала J такого, что $x \in J$ и $f \restriction J$ либо строго монотонна, либо постоянна. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что C конечно.

Допустим, что C бесконечно. Так как C определимо и модель $\mathcal{M}$ слабо ω-$p.o.$-lin-минимальна, то существует ω-интервал $I \subseteq C$. В силу (*) существует открытый интервал $J \subseteq I$ такой, что $f \restriction J$ либо строго монотонна, либо постоянна. Но существование такого интервала J противоречит определению множества C. $\square$

Замечание. Любая плотно упорядоченная слабо о-минимальная модель слабо плотно-$p.o.$-минимальна и слабо ω-$p.o.$-lin-минимальна, а любая функция в линейно упорядоченной модели согласована с порядком.

Возникает вопрос о существовании слабо плотно-*p.o.*-минимальной слабо ω-*p.o.*-*lin*-минимальной, но не слабо о-минимальной, модели. Следующий пример дает ответ на этот вопрос.

Пример. Такой моделью является счетный универсальный однородный частичный порядок [10, пример 6.3]. Напомним его построение.

Пусть $\mathcal{K}$ – класс всех конечных частичных порядков. Ясно, что $\mathcal{K}$ замкнут относительно изоморфизмов и подмоделей. Покажем, что он обладает следующими свойствами:

(JEP) если $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{K}$, то существуют $\mathcal{P}_3 \in \mathcal{K}$ и изоморфные вложения $g_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_3$, $i = 1, 2$ (*свойство совместного вложения*);

(AP) если $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{K}$ и $f_i : \mathcal{P}_0 \to \mathcal{P}_i$ – изоморфные вложения, то существуют $\mathcal{P}_3 \in \mathcal{K}$ и изоморфные вложения $g_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_3$, $i = 1, 2$, такие, что $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ (*свойство амальгамирования*).

В предположении $\varnothing \in \mathcal{K}$ свойство (JEP) будет частным случаем (AP). Поэтому достаточно доказать только (AP).

Пусть $\mathcal{P}_i = (P_i, <_i)$, $i = 0, 1, 2$. Можно считать, что f_1 и f_2 – тождественные вложения и $P_0 = P_1 \cap P_2$. Определим $\mathcal{P}_3 = (P_3, <_3)$, полагая $P_3 = P_1 \cup P_2$ и $x <_3 y$, если $x <_i y$ или $x <_j z <_{1-j} y$ для некоторых $i, j < 2$ и $z \in P_0$; для всех остальных $x, y \in P_3$ полагаем $\neg(x <_3 y)$. Ясно, что $\mathcal{P}_3 \in \mathcal{K}$. В качестве g_i берем тождественное вложение $\mathcal{P}_i \to \mathcal{P}_3$, $i = 1, 2$.

В силу [14, Theorem 7.1.2] (теорема Фраиссе) и [14, Theorem 7.4.1] существует счетный частичный порядок UP (называемый *пределом Фраиссе* класса $\mathcal{K}$) такой, что

(1) класс изоморфных копий его конечно-порожденных подмоделей совпадает с $\mathcal{K}$;

(2) UP *однороден*, т.е. любой изоморфизм между его конечными подмоделями продолжается до автоморфизма;

(3) теория $T = \mathrm{Th}(\mathrm{UP})$ является ω-категоричной и допускает элиминацию кванторов.

Из (1) и (2) следует, что частичный порядок UP является плотным и *универсальным* (т.е. в него изоморфно вкладывается любой счетный частичный порядок). Из плотности UP следует, что любая модель теории T является плотным частичным порядком. Из элиминации кванторов следует, что UP и любая модель теории T являются *p.o.*-минимальными. Из однородности и универсальности UP и из элиминации кванторов нетрудно вывести слабую ω-*p.o.*-*lin*-минимальность UP, откуда получаем (в силу ω-категоричности) слабую ω-*p.o.*-*lin*-минимальность теории T.

Список литературы

1. *van den Dries L.* Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, \cdot, exp)$ // *Logic Colloquium' 82* (Florence, 1982) / Stud. Logic Found. Math. V. 112. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 97–121.

2. *Pillay A. and Steinhorn C.* Definable sets in ordered structures. I // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. N 295. P. 565–592.

3. *Dickmann M. A.* Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // In: *Proc. of the 3rd Easter Conf. on Model Theory* (Gross Koris, 1985). Berlin: Humboldt Univ., 1985. P. 64–88.

4. *Macpherson D., Marker D., and Steinhorn C.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 352, N 12. P. 5435–5483.

5. *Belegradek O., Peterzil Y., and Wagner F.* Quasi-o-minimal structures // *J. Symbolic Logic.* 2000. V. 65, N 3. P. 1115–1132.

6. *Кудайбергенов К. Ж.* Слабо квази-о-минимальные модели // *Матем. тр.* 2010. Т. 13, № 1. С. 156–168.

7. *Toffalori C.* Lattice ordered o-minimal structures // *Notre Dame J. Formal Logic.* 1998. V. 39, N 4. P. 447–464.

8. *Newelski L. and Wencel R.* Definable sets in boolean-ordered o-minimal structures. I // *J. Symbolic Logic.* 2001. V. 66, N 4. P. 1821–1836.

9. *Macpherson D. and Steinhorn C.* On variants of o-minimality // *Ann. Pure Appl. Logic.* 1996. V. 79, N 2. P. 165–209.

10. *Кудайбергенов К. Ж.* Обобщение о-минимальности на частичные порядки // *Матем. тр.* 2012. Т. 15, № 1. С. 86–108.

11. *Кудайбергенов К. Ж.* Отношения выпуклости и обобщения о-минимальности // *Матем. тр.* 2018. Т. 21, № 1. С. 35–54.

12. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика.* М.: Наука, 1987.

13. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей.* М.: Мир, 1977.

14. *Hodges W. Model theory / Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.* V. 42. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 99-110
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 99-110

References

1. *van den Dries L.* Remarks on Tarski's problem concerning $(R, +, \cdot, exp)$ // *Logic Colloquium' 82* (Florence, 1982) / Stud. Logic Found. Math. V. 112. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 97–121.

2. *Pillay A. and Steinhorn C.* Definable sets in ordered structures. I // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. N 295. P. 565–592.

3. *Dickmann M. A.* Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // In: *Proc. of the 3rd Easter Conf. on Model Theory* (Gross Koris, 1985). Berlin: Humboldt Univ., 1985. P. 64–88.

4. *Macpherson D., Marker D., and Steinhorn C.* Weakly o-minimal structures and real closed fields // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 352, N 12. P. 5435–5483.

5. *Belegradek O., Peterzil Y., and Wagner F.* Quasi-o-minimal structures // *J. Symbolic Logic.* 2000. V. 65, N 3. P. 1115–1132.

6. *Kudaibergenov K. Zh.* Weakly quasi-o-minimal models // *Math. Proc.* 2010, V. 13, N 1. P. 156–168.

7. *Toffalori C.* Lattice ordered o-minimal structures // *Notre Dame J. Formal Logic.* 1998. V. 39, N 4. P. 447–464.

8. *Newelski L. and Wencel R.* Definable sets in boolean-ordered o-minimal structures. I // *J. Symbolic Logic.* 2001. V. 66, N 4. P. 1821–1836.

9. *Macpherson D. and Steinhorn C.* On variants of o-minimality // *Ann. Pure Appl. Logic.* 1996. V. 79, N 2. P. 165–209.

10. *Kudaibergenov K. Zh.* Generalized o-minimality for partial orders // *Math. Proc.* 2012, V. 15, N 1. P. 86–108.

11. *Kudaibergenov K. Zh.* Convexity relations and generalizations of o-minimality // *Math. Proc.* 2018, V. 21, N 1. P. 35–54.

12. *Ershov Yu. L. and Palyutin E. A. Mathematical Logic.* M.: Nauka, 1987.

13. *Keisler H. J. and Chang C. C. Model Theory* M.: Mir, 1977.

14. *Hodges W. Model theory / Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.* V. 42. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 99-110
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 99-110

Информация об авторе

Канат Жанзакович Кудайбергенов, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник

Scopus Author ID 24341020100

Author Information

Kanat Zh. Kudaibergenov, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Senior Researcher

Scopus Author ID 24341020100

Статья поступила в редакцию 23.04.2024;
одобрена после рецензирования 01.06.24; принята к публикации 13.06.2024

The article was submitted 23.04.2024;
approved after reviewing 01.06.24; accepted for publication 13.06.2024